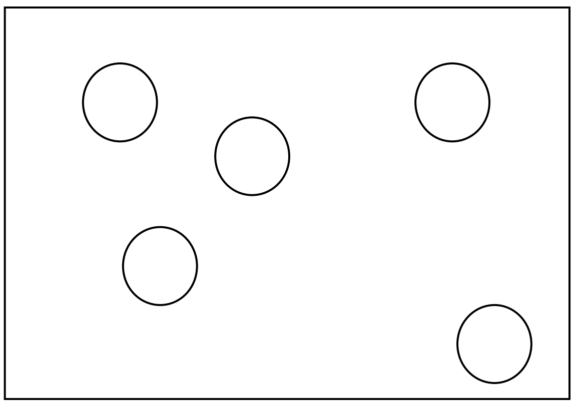
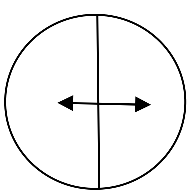
Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Geometrie der Kontexturen I

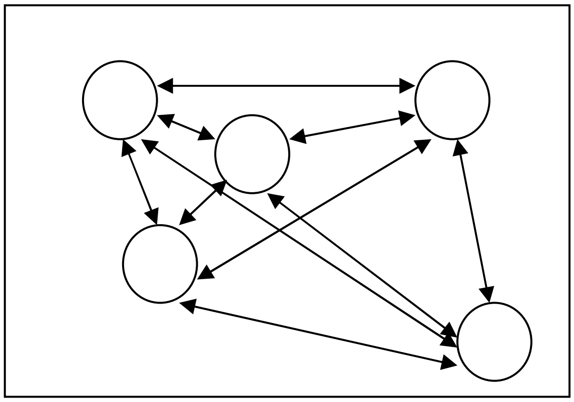
1. Besonders im Frühwerk von Günther werden disseminierte Kontexturen wie folgt geometrisch dargestellt:



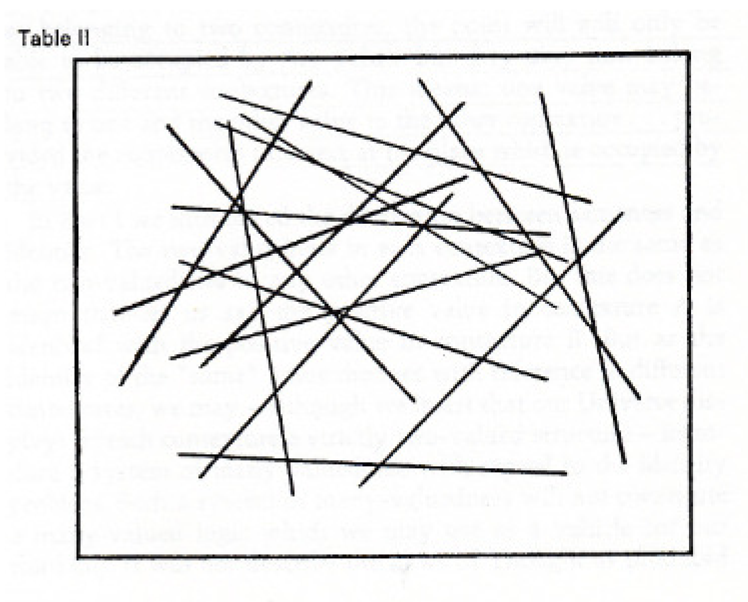
wobei jede Kontextur die 2-wertige Struktur der klassischen, aristotelischen Logik darstellt, d.h. eine positive und eine negative Seite besitzt, die durch einen ontologischen Abbruch einander transzendent sind. Hier gibt es zwei Arten von Operatoren: Die Intra-Operatoren, welche die Übergänge innerhalb der Kontexturen regeln



und die Trans-Operatoren, welche die Übergänge zwischen den Kontexturen regeln



2. Ein weiteres geometrisches Modell findet sich in Günther (1979, S. 289):



„Table II with its seeming chaos of straight lines crossing each another at all possible angles may illustrate what is meant. Each contexture is logically finite insofar as its structure is confined to two values. But their respective ranges are infinite because one can generate, within the respective domain, a potential infinity of natural numbers".

3. Aus dem 2. Modell geht hervor, dass sich Kontexturen schneiden können. Hierauf beruht auch die neuer Formalisierung Kaehrs

$$\mathcal{U}^{(3)} = \left(\mathcal{U}_1 \amalg_{1.2} \mathcal{U}_2\right) \amalg_{1.2.3} \mathcal{U}_3$$

$$\left(\mathcal{U}_1 \bigcap_{1.2} \mathcal{U}_2\right) \bigcap_{1.2.3} \mathcal{U}_3 = \phi:$$

$$\mathcal{U}_i = \{f_i, g_i\}, \quad i = 1, 2, 3$$

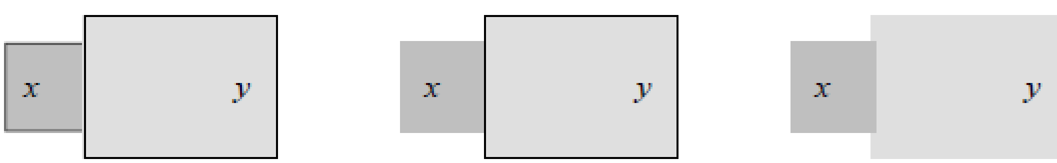
worin die leere Menge garantiert, dass sich die Universen bzw. Kontexturen 1, 2, 3 in keinem Punkte schneiden. Entsprechend werden sich schneidende Kontexturen durch kontexturierte Vereinigungsoperatoren dargestellt, z.B.

$K_1 \cup_{1.2} K_2$, $(K_1 \cup_{1.2} K_2) \cup_{1.2.3} K_3$, usw.

4. Starke Verfeinerungen der primitiven mengentheoretischen Relationen brachte in den letzten Jahren die sog. Mereotopologie, eine der jüngsten mathematischen Disziplinen. Hier stelle ich einige Möglichkeiten vor, wie man sowohl das Verältnis der beiden Seiten innerhalb von Kontexturen wie dasjenige zwischen Kontexturen zukünftig präziser formulieren könnte.

4.1. Mengen mit und ohne Closures

Hier gibt es drei Basisformen zur Abgeschlossenheit oder Offenheit von Kontexturen (vgl. Cohn/Varzi 2003, S. 5):



C_1 C_2 C_3

Figure 1: The three C relations (limit cases); a solid line indicates closure.

$$\begin{array}{ll}
\text{(A0)} & \varnothing = c(\varnothing) \\
\text{(A1)} & x \subseteq c(x) \\
\text{(A2)} & c(c(x)) \subseteq c(x) \\
\text{(A3)} & c(x) \cup c(y) = c(x \cup y)
\end{array}$$

Auch die aus der klassischen Topologie bekannte Tatsache, dass eine Menge zugleich offen und abgeschlossen sein kann, sollte für Kontexturen untersucht werden.

4.2.1. Die 5 Basistypen der Relationen von Mengen zueinander

Auf der Basis der Theorie der Teil-Ganzes-Relationen ergeben sich folgende 5 Fälle (Varzi/Cohn 2003):

$O_\tau(x, y) =_{df} \exists z(P_\tau(z, x) \wedge P_\tau(z, y))$	x τ-overlaps y
$A_\tau(x, y) =_{df} C_\tau(x, y) \wedge \neg O_\tau(x, y)$	x τ-abuts y
$E_\tau(x, y) =_{df} P_\tau(x, y) \wedge P_\tau(y, x)$	x τ-equals y
$PP_\tau(x, y) =_{df} P_\tau(x, y) \wedge \neg P_\tau(y, x)$	x is a proper τ-part of y
$TP_\tau(x, y) =_{df} P_\tau(x, y) \wedge \exists z(A_\tau(z, x) \wedge A_\tau(z, y))$	x is a tangential τ-part of y

Danach haben überlappenden Mengen mindestens 1 Punkt gemeinsam. Angrenzung bedeutet, dass zwei Mengen die gleiche Closure haben, sich aber nicht überlappen. Der letzte Fall bedeutet, dass bei Angrenzung zwei Mengen genau 1 Punkt gemeinsam haben.

Es gibt somit bei Mengen innere, äussere (Rand-) und Tangentialpunkte. Wenn man die obigen mit den aus der klassischen Mengentheorie bekannten Operatoren kombiniert, ergeben sich weitere 23 mereotopologische Operationen.

4.2.3. Die 23 abgeleiteten Typen von Relationen von Mengen zueinander

$IP_\tau(x, y) =_{df} P_\tau(x, y) \wedge \neg TP_\tau(x, y)$	x is an interior τ-part of y
$BP_\tau(x, y) =_{df} \forall z(P_\tau(z, x) \rightarrow TP_\tau(z, y))$	x is a boundary τ-part of y
$PO_\tau(x, y) =_{df} O_\tau(x, y) \wedge \neg P_\tau(x, y) \wedge \neg P_\tau(y, x)$	x properly τ-overlaps y
$TO_\tau(x, y) =_{df} \exists z(TP_\tau(z, x) \wedge TP_\tau(z, y))$	x tangentially τ-overlaps y
$IO_\tau(x, y) =_{df} \exists z(IP_\tau(z, x) \wedge IP_\tau(z, y))$	x internally τ-overlaps y
$BO_\tau(x, y) =_{df} O_\tau(x, y) \wedge \neg IO_\tau(x, y)$	x boundary τ-overlaps y

$\pi_\tau x\,\phi$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ \forall x\,(\phi \rightarrow P_\tau(z, x))$	τ-product of ϕers
$x+_\tau y$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ (P_\tau(z, x) \vee P_\tau(z, y))$	τ-sum of x and y
$x\times_\tau y$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ (P_\tau(z, x) \wedge P_\tau(z, y))$	τ-product of x and y
$x-_\tau y$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ (P_\tau(z, x) \wedge \neg O_\tau(z, y))$	τ-difference of x and y
$k_\tau(x)$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ \neg O_\tau(z, x)$	τ-complement of x
$i_\tau(x)$	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ IP_\tau(z, x)$	τ-interior of x
$e_\tau(x)$	$=_{df}\ i_\tau(k_\tau(x))$	τ-exterior of x
$c_\tau(x)$	$=_{df}\ k_\tau(e_\tau(x))$	τ-closure of x
$b_\tau(x)$	$=_{df}\ c_\tau(x) -_\tau i_\tau(x)$	τ-boundary of x
U_τ	$=_{df}\ \sigma_\tau z\ O_\tau(z, z)$	τ-universe
$Bd_\tau(x)$	$=_{df}\ \exists y BP_\tau(x, y)$	x is a τ-boundary
$Rg_\tau(x)$	$=_{df}\ \exists y IP_\tau(y, x)$	x is a τ-region
$Op_\tau(x)$	$=_{df}\ E_\tau(x, i_\tau(x))$	x is τ-open
$Cl_\tau(x)$	$=_{df}\ E_\tau(x, c_\tau(x))$	x is τ-closed
$Re_\tau(x)$	$=_{df}\ E_\tau(i_\tau(x), i_\tau(c_\tau(x)))$	x is τ-regular
$Cn_\tau(x)$	$=_{df}\ \forall y \forall z (E_\tau(x, y+_\tau z) \rightarrow C_\tau(y, z))$	x is τ-connected
$CP_\tau(x, y)$	$=_{df}\ P_\tau(x, y) \wedge Cn_\tau(x)$	x is a τ-connected part of y

Wir dürften somit nun ein maximal exaktes Rüstzeug vor uns haben, um die beiden Güntherschen Basismodelle weiterzuformalisieren.

Bibliographie

Cohn, Anthony G./Varzi, Achille C. Mereotopological connection. In: Journal of Philosophical Logic 32/4, 2003, S. 357-390. Digitalisat: http://www.columbia.edu/~av72/papers/Jpl_2003.pdf

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. Bd. II., Hamburg 1979

16.12.2010